Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Επίκ. Καθ. Γ. Γιαννούλης

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ IV
4 Ιουνίου 2013

Θέμα 1. (α΄) Προσδιορίστε τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει ($\in \mathbb{R}$) το ολοκλήρωμα

$$\int_{B_1} \frac{1}{\|(x,y,z)\|^\alpha}\, d(x,y,z) \left(:= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{B_1 \setminus B_\varepsilon} \frac{1}{\|(x,y,z)\|^\alpha}\, d(x,y,z), \text{ αν } \alpha > 0 \right),$$

όπου $B_r := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\| \le r\}$ $(r > 0)$ και $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^3$, και υπολογίστε την τιμή του, όπου υπάρχει.

(β΄) Υπολογίστε τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας και της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^3$.

(γ΄) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_B z\, d(x,y,z)$, όπου $B \subset \mathbb{R}^3$ το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x + y + z = 3$.

(δ΄) Πότε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ λέγεται Jordan-μετρήσιμο και πότε μηδενικού μέτρου;

Θέμα 2. (α΄) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$ $(a,b,c > 0)$ και το διανυσματικό πεδίο $f(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$. Τι εκφράζει η τιμή που βρήκατε;

(β΄) Υπολογίστε το $\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\, ds$, όπου $\gamma(t) = (t\cos t, t \sin t, t)$, $t \in [\sqrt{2}, \sqrt{7}]$.

(γ΄) Υπολογίστε το $\int_\gamma (yz, xz, xy) \cdot d(x,y,z)$, όπου γ η ένωση των καμπυλών $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$, και $\gamma_2(t) = (1, 0, 2\pi(1-t))$, $t \in [0,1]$. Υπολογίστε το μήκος της γ.

Θέμα 3. (α΄) Δείξτε ότι τα ολοκληρώματα αστρόβιλων συνεχώς διαφορίσιμων διανυσματικών πεδίων $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ πάνω σε κανονικές απλές καμπύλες είναι ανεξάρτητα του δρόμου.

(β΄) Επαληθεύστε το Θεώρημα του Gauss για το $V \subset \mathbb{R}^3$ που περικλείεται από τις επιφάνειες $y^2 + z^2 = r^2$, $x = \pm a$ $(r, a > 0)$, και για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = \frac{1}{3}(x,y,z)$. Τι εκφράζει η τιμή που βρήκατε; Υπολογίστε το εμβαδό του ∂V.

Θέμα 4. (α΄) Να εξεταστεί αν η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}$, συγκλίνει κατά σημείο ή ομοιόμορφα στα $[0,\infty)$ και $[\alpha, \infty)$ με $\alpha > 0$, και να υπολογιστεί το όριό της.

(β΄) Δείξτε ότι η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n^{2x}}$, όπου $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία, συγκλίνει στο $(1,\infty)$ απόλυτα και ομοιόμορφα σε μια διαφορίσιμη συνάρτηση.

(γ΄) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι $g \circ f_n \to g \circ f$ ομοιόμορφα.

Θέμα 5. Δίνεται η 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \pi, & x \in (0,\pi), \\ -\pi, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \pi. \end{cases}$

(α΄) Σχεδιάστε την $f(x)$ για $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

(β΄) Υπολογίστε τη σειρά Fourier της f. Γενικότερα, ποιές 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχουν σειρά Fourier;

(γ΄) Συγκλίνει η σειρά Fourier της f; Για ποιά $x \in \mathbb{R}$; Όπου συγκλίνει, ποιό είναι το όριό της; Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη; Αναπτύσσεται η f σε σειρά Fourier;

(δ΄) Αναπτύξτε το π^2 σε σειρά και υπολογίστε το όριο της σειράς $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$.

Λαμβάνονται υπόψη μόνο δικαιολογημένες απαντήσεις! Σκεφτείτε πριν υπολογίσετε!
ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!